УДК 551.5+ 556+ 504.3+ 504.4+ 51-73+ 51-74+ 51-76+ 517.5

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ: КАК ОПИСАТЬ ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫЙ МОДУЛИРОВАННЫЙ СИГНАЛ?

Р. Р. Нигматуллин[1] [0000-0003-2931-4428], А. А. Литвинов[2] [0009-0000-3901-3704], С. И. Осокин[3] [0000-0002-0699-5390]

[1, 2]Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева, 420111 Казань, Россия
[3]Казанский федеральный университет, Институт информационных технологий и интеллектуальных систем, 420008 Казань, Россия

[1]renigmat@gmail.com, [2]litvinov85@gmail.com, [3]s.osokin@it.kfu.ru

Аннотация

В работе построено преобразование любого произвольного сигнала в строго периодическую форму, которое позволяет применять обычное преобразование Фурье для аппроксимации уже преобразованного сигнала. Наиболее интересным приложением (по мнению авторов) является аппроксимация сигналов с частотно-фазовой модуляцией, которые фактически находятся внутри найденного преобразования. Это новое преобразование будет полезным для описания откликов различных сложных систем, когда отсутствует обычная модель описания. В качестве доступных данных мы рассматриваем метеоданные, соответствующие измерениям концентрации метана (CH_4) в атмосфере в течение 4 недель наблюдений. Было важно рассмотреть интегральные (кумулятивные) данные и найти их амплитудно-частотную характеристику (АЧХ). Если рассматривать каждый столбец как сигнал с частотно-фазовой модуляцией, то АЧХ можно оценить с помощью преобразования Фурье, период которого равен 2π, что справедливо для любого анализируемого случайного сигнала. Такое «универсальное» преобразование Фурье позволяет описать широкий набор случайных сигналов и сравнить их между собой по АЧХ. Эти новые возможности традиционного Фурье-анализа позволяют преобразованию Фурье стать еще более востребованным инструментом в арсенале методов, используемых исследователями в области обработки данных.

***Ключевые слова**: преобразование Фурье, случайный сигнал, частотно-фазовый модулированный сигнал, амплитудно-частотная характеристика, сложные системы, метеорологические данные, вихревые ковариации.*

***Список основных аббревиатур:** АЧХ – амплитудно-частотная характеристика; НОКАФСС – Не Ортогональный Комбинированный Анализ Фурье для Сглаженных Сигналов); NOCFASS – Non-Orthogonal Combined Fourier Analysis of the Smoothed Signals; ПРА – последовательность ранжированных амплитуд*

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Всем известен основной недостаток традиционного преобразования Фурье. Он заключается в предположении, что любой цифровой случайный сигнал является периодическим, т. е.

$$Sg(t+T)=Sg(t). \tag{1}$$

Здесь Sg(t) – произвольный случайный сигнал, T – период, совпадающий с Range(t). Range(t)=max t–min t определяет длину анализируемого сигнала Sg(t). Во многих случаях это предположение о периодичности сигнала оказывается недоказуемым, но при этом используется.

Если мы хотим заменить чисто периодический сигнал его апериодической копией, то возникает проблема невозможности аппроксимации дискретного апериодического сигнала. Эта проблема не может быть решена интегральным преобразованием Фурье апериодических сигналов, следовательно, оно не может быть использовано для предсказания апериодического сигнала за пределами заданного интервала временного окна.

Дискретные представления многих аналоговых сигналов играют важную роль при их обработке. Они содержат необходимую информацию, связанную со свойствами сигналов, и допускают их дальнейшую обработку [1]. В традиционной схеме сигналы могут быть представлены в виде рядов Тейлора–Маклорена, Дирихле, Лорана, Лежандра, Паде, Прони и Фурье. Подчеркнём, что, по нашему мнению, эти ряды разложения применяются для описания данных без какого-либо математического обоснования. В области обработки сигналов классический ряд Фурье – простой и часто используемый инструмент. Однако он не позволяет выделить как субгармонические, так и интергармонические компоненты заданного сигнала, и во многих ситуациях имеет серьёзные недостатки [2–5]. Предлагаемый метод позволяет преодолеть ограничения Фурье-анализа. Фурье-анализ основан на частотно-временных методах [6], которые использовались в последние десятилетия, а именно: дискретное [7–9], быстрое [10–12], оконное преобразование Фурье [13, 14], преобразование Габора [15–17], вейвлет [18–20], преобразование Гильберта–Хуанга [21–23], преобразование Фурье–Бесселя [24, 25] и даже разложение по эмпирическим модам [26, 27]. В указанных работах показано, что существует множество различных приближений для преодоления основного недостатка (1), связанного с предположением о периодичности. Однако внимательный анализ этих приближений позволяет сформулировать следующую задачу: определить, существует ли универсальное преобразование исходного сигнала, позволяющее преобразовать его в другой цифровой сигнал, имеющий строго период 2π. Действительно, если записать следующее соотношение:

$$\mathrm{Sg(t)=a\cdot cos(F(t))+b} \tag{2}$$

и начать анализировать вместо исходной функции Sg(t) аргумент F(t) косинуса в (2), то мы получим желаемый результат. Функция F(t) представляет собой объединённый сигнал с частотно-фазовой модуляцией и обеспечивает желаемый интервал [–1, 1] для cos(F(t)), а аргумент F(t) попадает в интервал $[0,\pi]$. Поэтому конечный результат разложения любого сигнала $\cos(\Omega_k t)$ сохраняет прежний вид (2), если к нему добавить разложение F(t) по аппроксимирующей функции Yft(t,K) в виде конечного отрезка ряда Фурье

$$\begin{gathered}\mathrm{F(t)} \cong \mathrm{Yft(t,K)} = \mathrm{Ph}_0 + \sum_{k=1}^{K}\left[\mathrm{Ac}_k \cos\left(\Omega_k t\right) + \mathrm{As}_k \sin\left(\Omega_k t\right)\right], \\ \Omega_k = 2,3,\ldots,K.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь мы учитываем свойство $F(t)=F(t\pm\pi)$, определяющее полупериодическую функцию. Таким образом, эти два простых выражения (2) и (3) достаточно эффективно решают задачу разложения любой случайной функции Sg(t) в ряд Фурье, поскольку в данном случае решена проблема периодичности разлагаемого сигнала.

2. ОПИСАНИЕ МЕТЕОДАННЫХ

Скажем несколько слов о реальных данных и их особенностях. В качестве реальных данных мы взяли вихревые ковариационные экологические данные, связанные с содержанием метана CH_4 в атмосфере. В настоящей работе мы рассматриваем баланс метана, т. е. произведение соответствующей концентрации на величину вертикальной скорости. Были взяты данные с приборов на вышке, расположенной возле Обсерватории Казанского университета, с измерениями вихревых ковариаций, связанных с содержанием метана в атмосфере, и скорости воздушных потоков. Измерения концентрации метана CH_4 (umol/mol) и вертикальной скорости воздуха W (m/s) проводились с 1 по 7 января 2024 года. Значения данных CH_4 были умножены на соответствующие измеренные значения скорости потока воздуха W. Частота измерения составляла 10 раз в секунду. Данные за одну секунду усредняли, а уже секундные (усредненные) значения собирали в часовые группы/столбцы. Получилось 168 часовых столбцов в неделю по 3600 секунд в столбце.

3. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОБРАБОТКИ

Каждая прямоугольная матрица $N\times M$ содержит $N = 3600$ строк (каждая строка соответствует одной секунде измерений и, следовательно, один столбец – одному часу измерений), а количество столбцов $M = 24\times 7 = 168$ соответствует одной неделе измерений. Демонстрируя новую модификацию преобразования Фурье, мы рассматриваем только три базовые кривые, соответствующие максимальным, средним и минимальным значениям. Эти кривые показаны на рис. 1 Здесь независимая переменная $x_j = j/N$ ($N = 3600$). Сделали нормировку независимой переменной на общее количество измерений за один час.

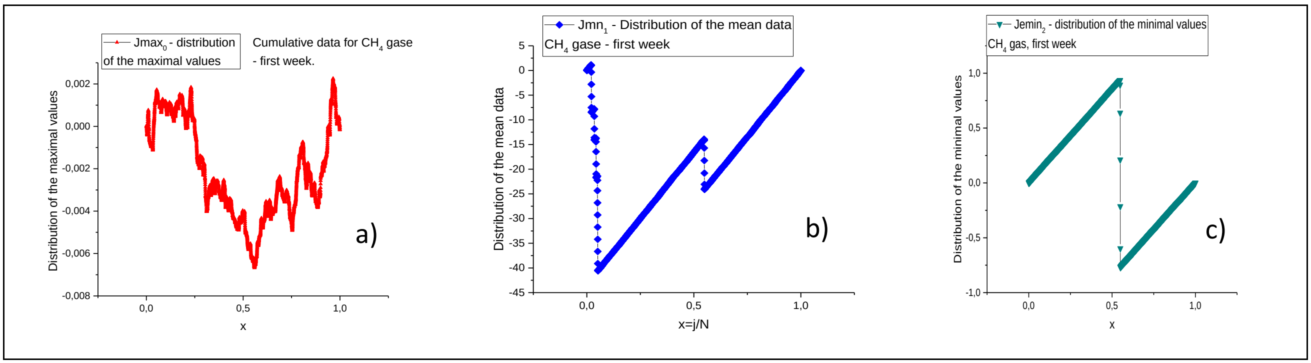


Рис. 1. Слева показана кривая с максимальными значениями, в центре – средние данные (усредненные по всему периоду измерений), а справа – кривая с минимальными значениями

Вычисление аргументов Fq(t) (q = 0, 1, 2) из (2) для этих кривых, расположенных в интервале (0, π), показано на рис. 2.

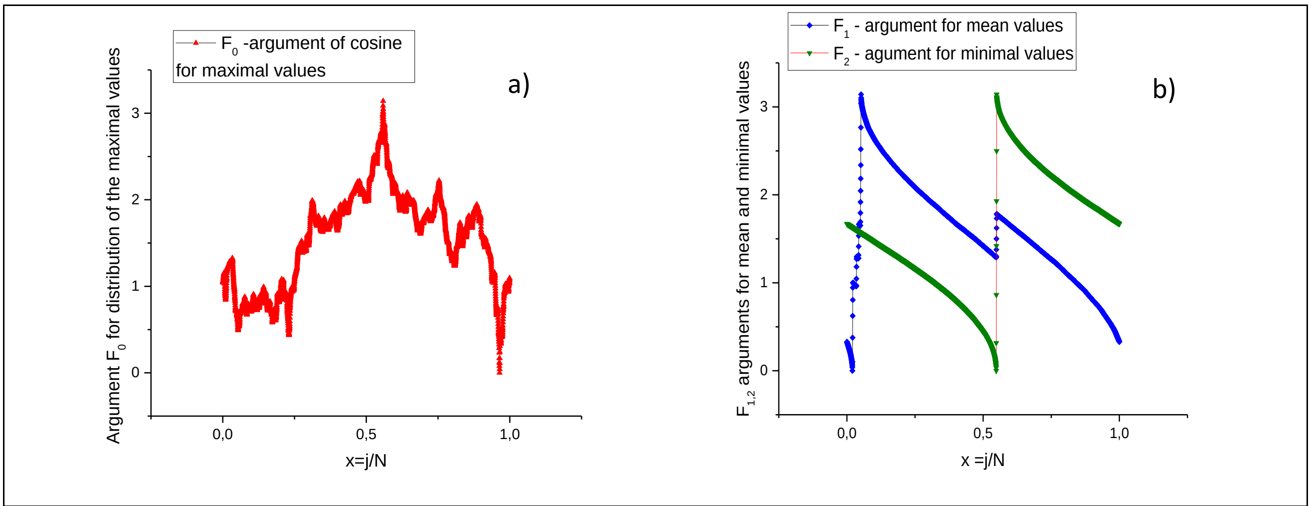


Рис. 2. Слева показан аргумент $F_0(t)$ функции косинуса в (2) для максимальной кривой, справа – соответствующие аргументы для средней кривой $F_1(t)$ (синие точки) и минимальной кривой $F_2(t)$ (зеленые точки)

Для нахождения АЧХ для этих трёх кривых удобно использовать метод НОКАФСС (Не Ортогональный Комбинированный Анализ Фурье для Сглаженных Сигналов) / NOCFASS (Non-Orthogonal Combined Fourier Analysis of the Smoothed Signals) [28], предложенный одним из авторов (RRN) настоящей работы. Основная идея подхода НОКАФСС заключается в смещении экстремальной кривой к центру преобразования Фурье с помощью угла π. Она поясняется рисунками 3.

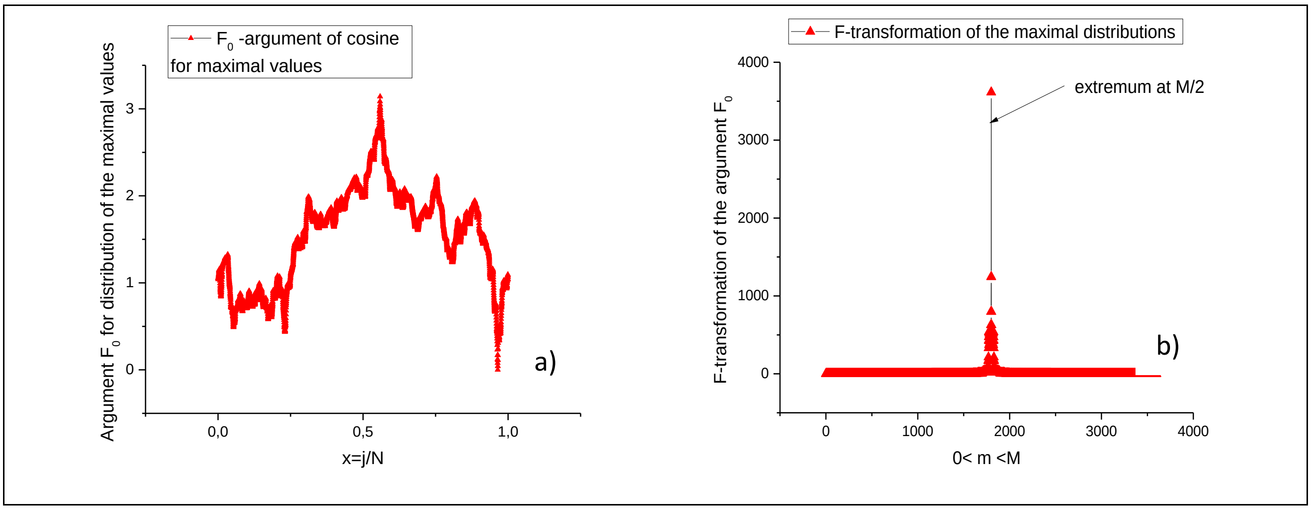


Рис. 3. Слева показан аргумент $F_0(t)$, соответствующий кривой с максимальными значениями. Справа – преобразование Фурье, смещенное к центру N/2 = 1800 с резонансным значением, равным 4032.668

Анализ этого преобразования Фурье показал, что достаточно взять небольшое количество частот, расположенных в окрестности резонансного пика, показанного справа. Поэтому мы рассматриваем безразмерную полосу частот в интервале [1800, 2000].

Такой модифицированный подход позволил уменьшить количество мод, которое существенно зависит от значения конечной моды K. Это значение определяется величиной относительной погрешности, которая, в свою очередь, вычисляется как

$$\mathrm{RelErr}(K)=\left[\frac{\mathrm{stdev}(F(t)-Yft(t,K))}{\mathrm{mean}|F(t)|}\right]\cdot 100\% . \qquad (4)$$

Для аппроксимации достаточно взять небольшое количество частот, охватывающих интервал [Vect, Vect+200]. Итоговый результат показан на рис. 4 и 5.

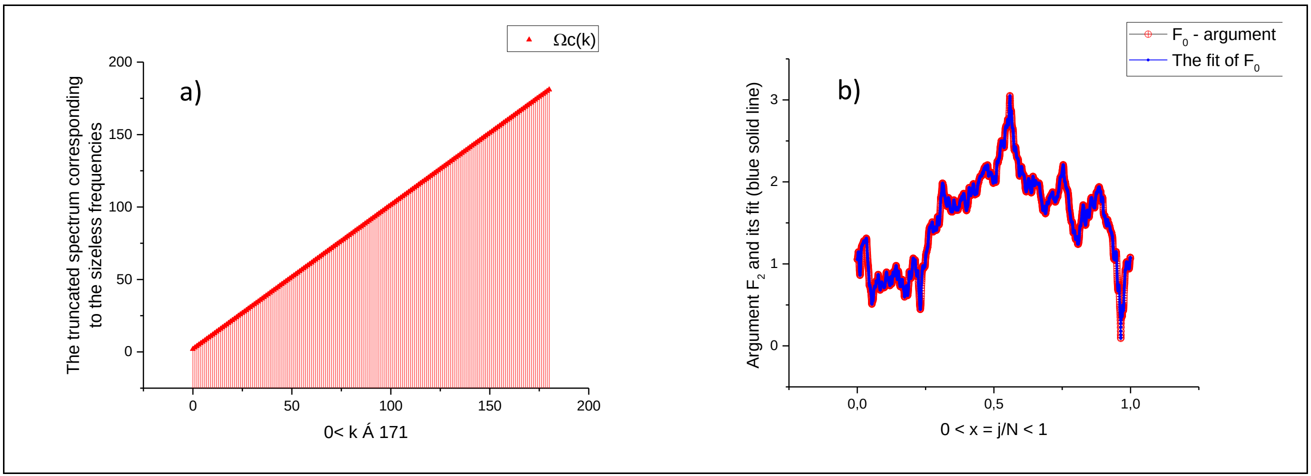


Рис. 4. Слева показан усеченный спектр, расположенный в интервале [2, 171]. Справа аппроксимирующая функция Yft(t) для функции $F_0(t)$

Усеченный спектр, показанный на рис. 4 (а), достаточен для обеспечения аппроксимации с величиной относительной ошибки (определяемой выражением (4)) менее 1%. Точные значения относительной погрешности собраны в таблице 1.

АЧХ для усеченного спектра приведена на рис. 5.

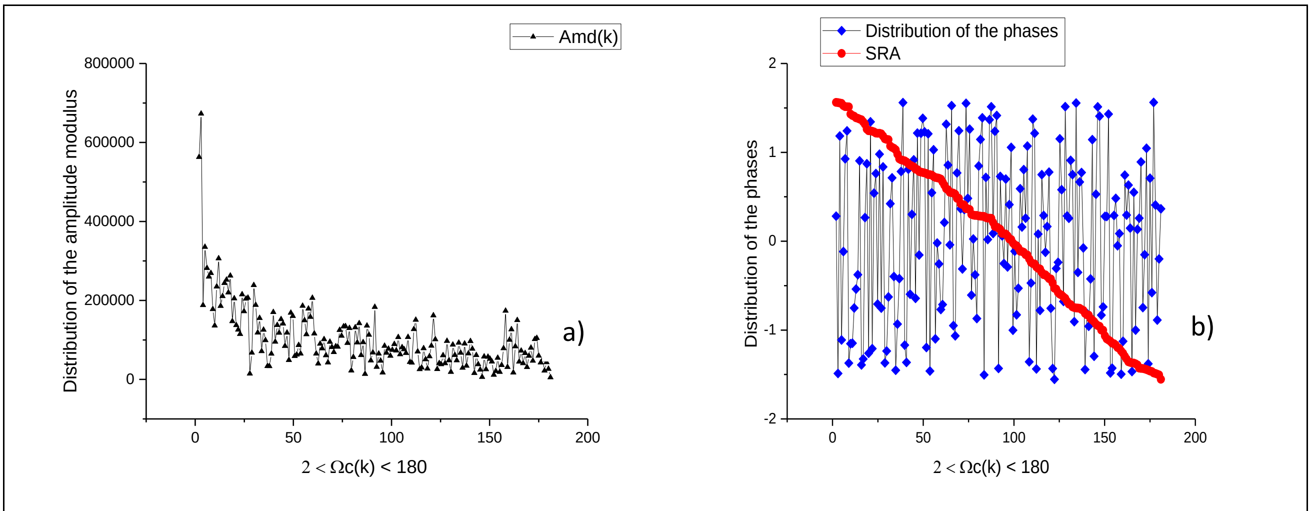


Рис. 5. Слева показан модуль амплитуд $Amd_k = \sqrt{Ac_k^2 + As_k^2}$,справа – распределение фаз $Phase_k = \tan^{-1}(As_k / Ac_k)$

Сплошная прямая линия, показанная на правом рисунке, соответствует последовательности ранжированных амплитуд (ПРА) упорядоченных фаз. Легко заметить, что ПРА близка по виду к отрезку прямой линии. Это свидетельствует о том, что распределение фаз практически однородно. Чтобы завершить процедуру аппроксимации, продемонстрируем переход от аппроксимации аргумента $F_0(t)$ к исходному сигналу $Mex(t)_0$ (см. рис. 6).

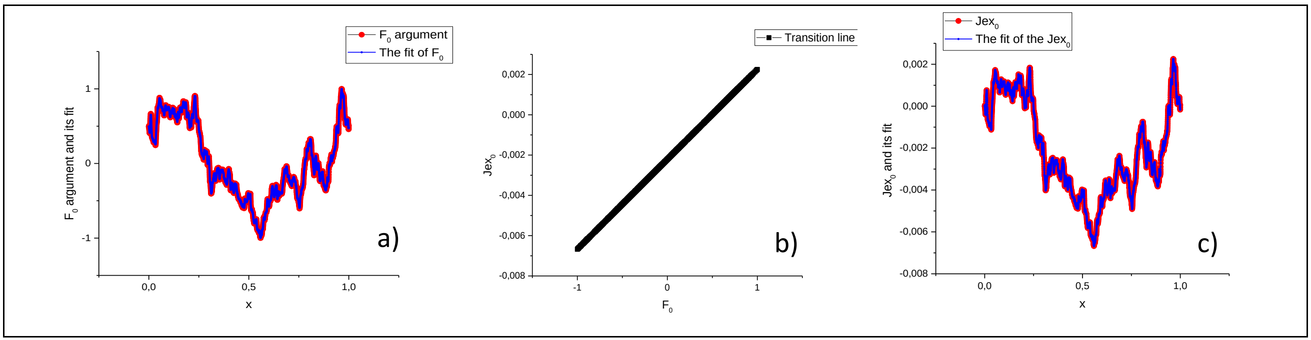


Рис. 6. Слева показаны масштабированная функция $mex_0(t) = \cos(F_0(t))$ и ее аппроксимация $Jex_0(Yft(t))$. Центральный рисунок помогает определить значения наклона a и пересечения b. Справа синей сплошной линией показана окончательная аппроксимирующая функция

На рис. 6 показано восстановление исходного сигнала. Слева можно видеть масштабированную функцию $mex_0(t) = \cos(F_0(t))$ (красные точки) и ее аппроксимацию $Jex_0(Yft(t))$, показанную синей сплошной линией. Чтобы найти параметры масштабирования, можно использовать центральный рисунок, который помогает определить значения наклона (a = 0.00446) и пересечения (b = –0.00221). Окончательная аппроксимирующая функция показана на правом рисунке синей сплошной линией.

Приближенная аппроксимирующая функция исходного сигнала определяется выражением

$$Ex(t) = a\cos\left(Yft(t)\right) + b\,,$$

где параметры масштабирования a и b находятся как значения наклона и пересечения соответственно из центрального рис. 6 (b). Таким же образом можно аппроксимировать случайные кривые, изображенные на рисунке 2 (b). Приведём основные из них (см. рис. 7–10).

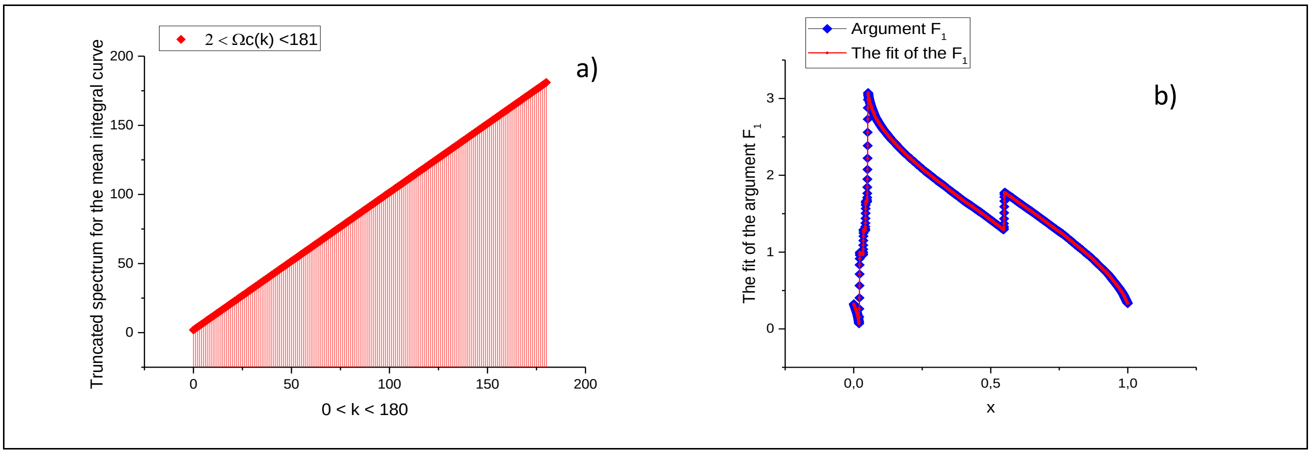


Рис. 7. Слева показан усеченный спектр, расположенный в интервале [2, 181]. Справа сплошной синей линией представлена аппроксимирующая функция Yft(t) для функции $F_1(t)$

Усеченный спектр на рис. 7 (a) достаточен для обеспечения аппроксимации с величиной относительной ошибки (определяемой выражением (4)) менее 1%. Точные значения относительной погрешности представлены в таблице 1.

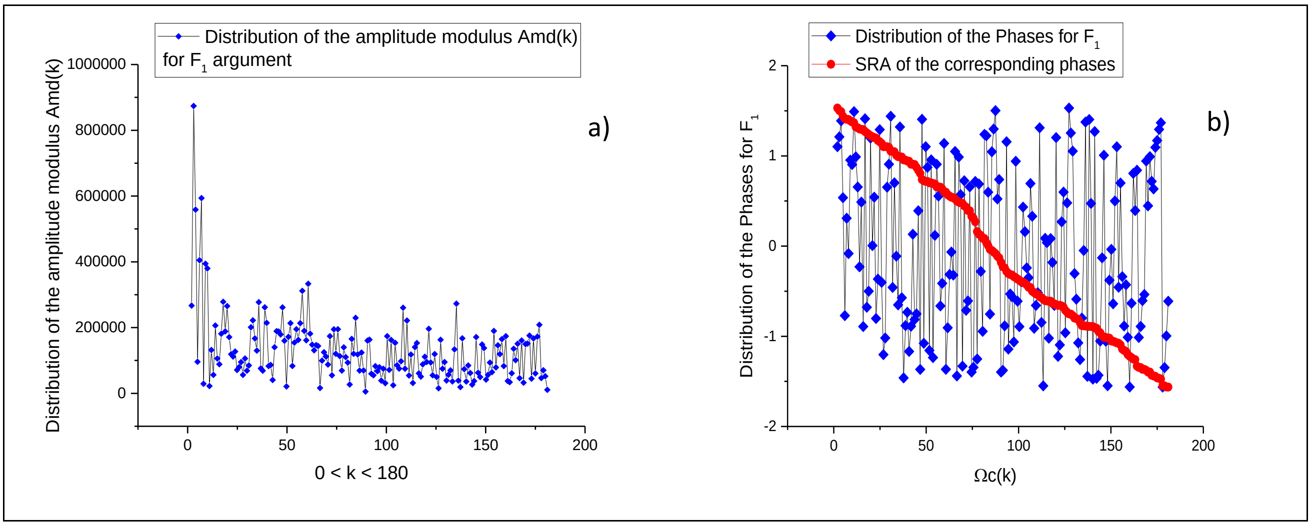


Рис. 8. Слева показаны модули амплитуд $Amd_k = \sqrt{Ac_k^2 + As_k^2}$, справа – распределение фаз $Phase_k = \tan^{-1}\left(As_k / Ac_k\right)$ для аргумента $F_1(t)$

Сплошная прямая линия, показанная на рис. 8 (b), соответствует последовательности ранжированных амплитуд (ПРА) для упорядоченных фаз.

Легко заметить, что она близка по виду к отрезку прямой линии. Это ещё раз свидетельствует о том, что распределение фаз практически однородно.

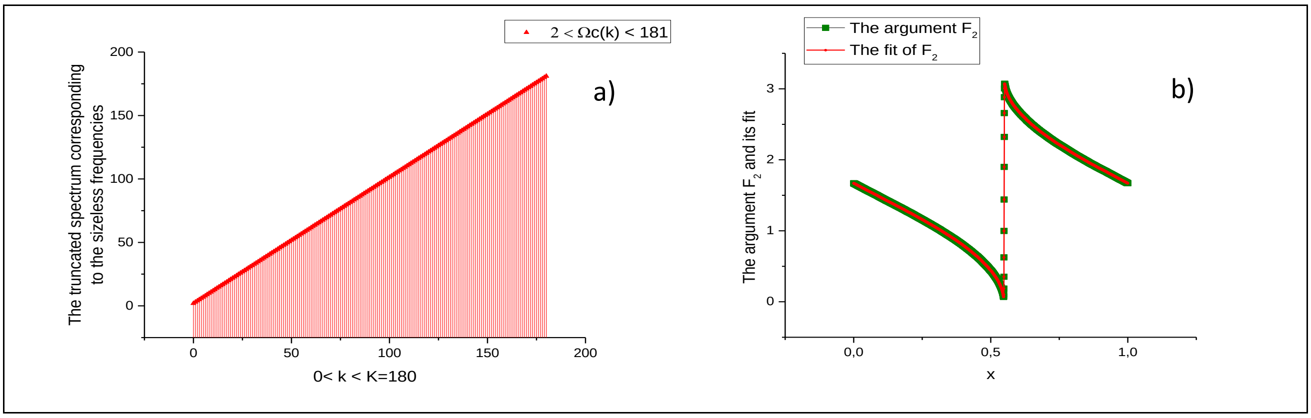


Рис. 9. Слева показан усеченный спектр, расположенный в интервале [2, 181]. Справа сплошной красной линией показана аппроксимирующая функция Yft(t) для функции $F_2(t)$

Усеченный спектр на рис. 9 (a) достаточен для обеспечения аппроксимации с величиной относительной ошибки (определяемой выражением (4)) менее 1%. Точные значения относительной погрешности представлены в таблице 1.

Сплошная прямая линия, показанная на рис. 10 (b), соответствует последовательности ранжированных амплитуд (ПРА) для упорядоченных фаз. Видно, что она близка по виду к отрезку прямой линии. Это подтверждает также, что распределение фаз практически однородно.

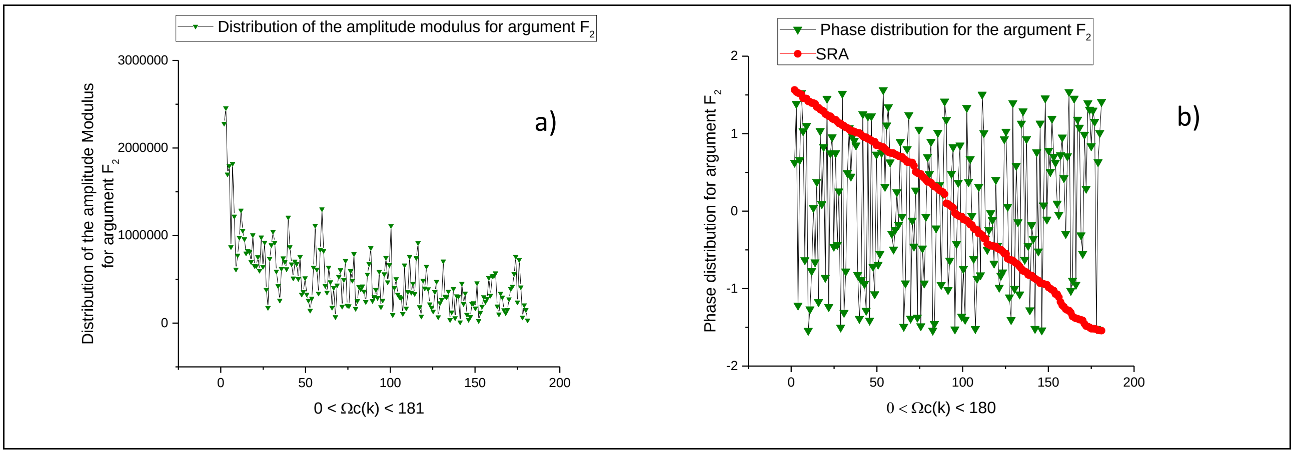


Рис. 10. Слева показан модуль амплитуд $\mathrm{Amd}_k = \sqrt{\mathrm{Ac}_k^2 + \mathrm{As}_k^2}$, справа – распределение фаз $\mathrm{Phase}_k = \tan^{-1}\left(\mathrm{As}_k / \mathrm{Ac}_k\right)$ для аргумента $F_2(t)$.

Таблица 1. Основные параметры, которые использовались для аппроксимации функций $F_p(t)$ (p = 0,1,2), соответствующих первой неделе измерений

Функция	Fres	Ph0	RelErr(%)	K	a	b
F0(t)	4032.6694	0.0947	0.107	180	0.00446	-0.00221
F1(t)	3901.1394	0.0825	0.079	180	3.3585	3.8223
F2(t)	3571.141	0.9045	0.144	180	0.8517	0.0839

Мы считаем, что полученные значения достаточно информативны для подтверждения эффективности модифицированного преобразования Фурье.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Предложенная модификация традиционного преобразования Фурье предоставляет новые возможности для аппроксимации широкого набора случайных функций. Можно утверждать, что любая случайная функция имеет свою АЧХ, котрая находится внутри аргумента косинуса (см. выражения (2) и (3)) и даёт фактически истинный спектр для сигналов с частотно-фазовой модуляцией и второй спектр для амплитудно-модулированных сигналов. Действительно, если случайный сигнал имеет следующую структуру:

$$Sg(t) = A(t)\cos(Fr(t)) \to a\cos\left(F(t)\right) + b,$$

то правая часть случайного сигнала Sg(t) включает в себя все три типа возможных модуляций (амплитудную, частотную и фазовую). Преобразование, использованное в настоящей работе, в полной мере применимо для двух видов модуляции (частотной и фазовой) как точное, а для амплитудной модуляции может рассматриваться как приближенное. АЧХ, рассчитанная для функции F(t), может рассматриваться как полезный вторичный спектр при анализе и аппроксимации различных случайных сигналов с амплитудной модуляцией. Если амплитудная модуляция отсутствует, то зависимость (2) становится единственной и точной. Формула

(2) допускает следующее обобщение (если Sg(t) представляется в виде одной моды)

$$\mathrm{Sg}(t) = A\cos\left(F(t)\right) + B\sin\left(F(t)\right),$$

где постоянные A и B предполагаются известными. Отсюда можно найти аргумент F(t)

$$F(t) = \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{Sg}(t)}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right). \tag{5}$$

Таким образом, выражение (5) обобщает предыдущие выражения и расширяет границы применения предложенного модифицированного преобразования Фурье.

Выделим основные полученные результаты.

1. Для случайной функции Sg(t) найдена чисто периодическая функция F(t).
2. Эта функция F(t) связана нелинейным образом с исходным случайным сигналом.
3. Предложенный подход решает задачу аппроксимации широкого класса сигналов с частотно-фазовой модуляцией.
4. Благодаря этому, широкое применение этой модификации преобразования Фурье будет полезно, в частности, для описания откликов различных сложных систем, таких как технические, финансовые, медицинские и т. д., когда простая модель отсутствует.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект № FZSM-2024-0004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mertins A.* Signal Analysis: Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications. Wiley: Chichester, UK, 1999.

2. *Arecchi F., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 1217–1220.

3. *Chen J., Chau K., Chan C., Jiang Q.* Subharmonics and chaos in switched reluctance motor drives // *IEEE Trans. Energy Convers*. 2002. Vol. 17. P. 73–78.

4. *Lauterborn W., Cramer E.* Subharmonic route to chaos observed in acoustics // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47. P. 1445.

5. *Wilden I., Herzel H., Peters G., Tembrock G.* Subharmonics, biphonation, and deterministic chaos in mammal vocalization // Bioacoustics. 1998. Vol. 9. P. 171–196.

6. *Cohen L.* Time-Frequency Analysis. Prentice Hall Press: NJ, USA, 1995; Vol. 778.

7. *Almeida L.B.* The fractional Fourier transform and time-frequency representations // IEEE Trans. Signal Process. 1994. Vol. 42. P. 3084–3091.

8. *Sejdić E., Djurović I., Stanković L.* Fractional Fourier transform as a signal processing tool: An overview of recent developments // Signal Process. 2011. Vol. 91. P. 1351–1369.

9. *Su X., Tao R., Kang X.* Analysis and comparison of discrete fractional Fourier transforms // Signal Process. 2019. Vol.160. P. 284–298.

10. *Portnoff M.* Time-frequency representation of digital signals and systems based on short-time Fourier analysis // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 1980. Vol. 28. P. 55–69.

11. *Qian S., Chen D.* Joint time-frequency analysis // IEEE Signal Process. Mag. 1999. Vol. 16. P. 52–67.

12. *Li M., Liu Y., Zhi S., Wang T., Chu F.* Short-time Fourier transform using odd symmetric window function // J. Dyn. Monit. Diagn. 2022. Vol. 1. P. 37–45.

13. *Hlubina P., Luňáček J., Ciprian D., Chlebus R.* Windowed Fourier transform applied in the wavelength domain to process the spectral interference signals // Opt. Commun. 2008. Vol. 281. P. 2349–2354.

14. *Kemao Q.* Windowed Fourier transform for fringe pattern analysis // Appl. Opt. 2004. Vol. 43. P. 2695–2702.

15. *Qian S., Chen D.* Discrete Gabor transform // IEEE Trans. Signal Process. 1993. Vol. 41. P. 2429–2438.

16. *Yao J., Krolak P., Steele C.* The generalized Gabor transform // IEEE Trans. Image Process. 1995. Vol. 4. P. 978–988.

17. *Zhao Z., Tao R., Li G., Wang Y.* Clustered fractional Gabor transform // Signal Process. 2020. Vol. 166. Article No. 107240. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.107240Get rights and content

18. *Mallat S.* A Wavelet Tour of Signal Processing, 3rd ed. Academic Press: Burlington, MA, USA, 1999.

19. *Yan R., Gao R.X., Chen X.* Wavelets for fault diagnosis of rotary machines: A review with applications // Signal Process. 2014. Vol. 96. P. 1–15.

20. *Kumar A.* Wavelet signal processing: A review for recent applications // Int. J. Eng. Tech. 2020. Vol. 6. No. 6. P. 1–7.

21. *Peng Z.K., Peter W.T., Chu F.L.* A comparison study of improved Hilbert–Huang transform and wavelet transform: Application to fault diagnosis for rolling bearing // Mech. Syst. Signal Process. 2005. Vol. 19. P. 974–988.

22. *Zayed A.I.* Hilbert transform associated with the fractional Fourier transform // IEEE Signal Process. Lett. 1998. Vol. 5. P. 206–208.

23. *De Souza U.B., Escola J.P.L., da Cunha Brito L.* A survey on Hilbert–Huang transform: Evolution, challenges and solutions // Digit. Signal Process. 2021. Vol. 120. No. 4. 103292. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103292

24. *Bhattacharyya A., Singh L., Pachori R.B.* Fourier–Bessel series expansion based empirical wavelet transform for analysis of non-stationary signals // Digit. Signal Process. 2018. Vol. 78. P. 185–196.

25. *Chaudhary P.K., Gupta V., Pachori R.B.* Fourier–Bessel representation for signal processing: A review // Digit. Signal Process. 2023. Vol. 135. 103938. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2023.103938Get rights and content

26. *Huang N.E., Shen Z., Long S.R., Wu M.C., Shih H.H., Zheng Q., Yen N.C., Tung C.C., Liu H.H.* The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis // Proc. R. Soc. Lond. A Math. Phys. Eng. Sci. 1998. Vol. 454. P. 903–995.

27. *Wu Z., Huang N.E.* Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method // Adv. Adapt. Data Anal. 2009. Vol. 1. P. 1–41.

28. *Nigmatullin R.R., Alexandrov V., Agarwal P., Jain S., Ozdemir N.* Description of Multi-Periodic Signals Generated By Complex Systems: NOCFASS – New Possibilities of the Fourier Analysis // Numerical Algebra, Control and Optimization. March 2024. Vol. 14. No. 1. P. 1–19. https://doi.org/10.3934/naco.2022008.

NEW POSSIBILITIES OF THE FOURIER TRANSFORMATION: HOW TO DESCRIBE AN ARBITRARY FREQUENCY-PHASE MODULATED SIGNAL?

R. R. Nigmatullin[1] [0000-0003-2931-4428], A. A. Litvinov[2] [0009-0000-3901-3704],

S. I. Osokin[3] [0000-0002-0699-5390]

[1, 2]Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev, Radioelectronics and Informative Measurements Technics department, 420111 Kazan, Russia.

[3]Kazan Federal University, Institute of Information Technologies and Intellectual Systems, 420008 Kazan, Russia.

[1]renigmat@gmail.com, [2]litvinov85@gmail.com, [3]s.osokin@it.kfu.ru

Abstract

In this paper, the authors found a transformation that is valid for any *arbitrary* signal. This transformation is strictly periodical and therefore it allows to apply the ordinary F-transformation for the fitting of the transformed signal. The most interesting application (in accordance with the author's opinion) is the fitting of the frequency-phase modulated signals that actually located inside the found transformation. This new transformation will be useful for application of the responses of different complex systems when an ordinary model is absent.

As an available data we consider meteo-data corresponding to measurements of methane concentration (CH_4) in atmosphere during 4 weeks of its observation. For us it is important to consider the integral (cumulative) data and find their amplitude-frequency response (AFR). If one considers each column as frequency-phase modulated signal, then AFR can be evaluated with the help of F-transformation that has the period equals 2π that is valid for any analyzed random signal. This "universal" F-transformation allows to fit a wide set of random signals and compare them with each other in terms of their AFRs. Concluding the abstract one can say that these new possibilities of the traditional F-analysis will serve as a common tool in the armory of the methods used by researchers in data processing area.

Keywords*: Fourier transform, random signal, frequency-phase modulated signal, amplitude-frequency response, complex systems, meteorological data, eddy covariance.*

The list of the main abbreviations: *AFR – amplitude-frequency response, NOCFASS – Non-Orthogonal Combined Fourier Analysis of the Smoothed Signals, SRA – sequence of the range amplitudes*

REFERENCES

1. *Mertins A.* Signal Analysis: Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications. Wiley: Chichester, UK, 1999.

2. *Arecchi F., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 1217–1220.

3. *Chen J., Chau K., Chan C., Jiang Q.* Subharmonics and chaos in switched reluctance motor drives // *IEEE Trans. Energy Convers*. 2002. Vol. 17. P. 73–78.

4. *Lauterborn W., Cramer E.* Subharmonic route to chaos observed in acoustics // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47. P. 1445.

5. *Wilden I., Herzel H., Peters G., Tembrock G.* Subharmonics, biphonation, and deterministic chaos in mammal vocalization // Bioacoustics. 1998. Vol. 9. P. 171–196.

6. *Cohen L.* Time-Frequency Analysis. Prentice Hall Press: NJ, USA, 1995; Vol. 778.

7. *Almeida L.B.* The fractional Fourier transform and time-frequency representations // IEEE Trans. Signal Process. 1994. Vol. 42. P. 3084–3091.

8. *Sejdić E., Djurović I., Stanković L.* Fractional Fourier transform as a signal processing tool: An overview of recent developments // Signal Process. 2011. Vol. 91. P. 1351–1369.

9. *Su X., Tao R., Kang X.* Analysis and comparison of discrete fractional Fourier transforms // Signal Process. 2019. Vol.160. P. 284–298.

10. *Portnoff M.* Time-frequency representation of digital signals and systems based on short-time Fourier analysis // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 1980. Vol. 28. P. 55–69.

11. *Qian S., Chen D.* Joint time-frequency analysis // IEEE Signal Process. Mag. 1999. Vol. 16. P. 52–67.

12. *Li M., Liu Y., Zhi S., Wang T., Chu F.* Short-time Fourier transform using odd symmetric window function // J. Dyn. Monit. Diagn. 2022. Vol. 1. P. 37–45.

13. *Hlubina P., Luňáček J., Ciprian D., Chlebus R.* Windowed Fourier transform applied in the wavelength domain to process the spectral interference signals // Opt. Commun. 2008. Vol. 281. P. 2349–2354.

14. *Kemao Q.* Windowed Fourier transform for fringe pattern analysis // Appl. Opt. 2004. Vol. 43. P. 2695–2702.

15. *Qian S., Chen D.* Discrete Gabor transform // IEEE Trans. Signal Process. 1993. Vol. 41. P. 2429–2438.

16. *Yao J., Krolak P., Steele C.* The generalized Gabor transform // IEEE Trans. Image Process. 1995. Vol. 4. P. 978–988.

17. *Zhao Z., Tao R., Li G., Wang Y.* Clustered fractional Gabor transform // Signal Process. 2020. Vol. 166. Article No. 107240. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.107240Get rights and content

18. *Mallat S.* A Wavelet Tour of Signal Processing, 3rd ed. Academic Press: Burlington, MA, USA, 1999.

19. *Yan R., Gao R.X., Chen X.* Wavelets for fault diagnosis of rotary machines: A review with applications // Signal Process. 2014. Vol. 96. P. 1–15.

20. *Kumar A.* Wavelet signal processing: A review for recent applications // Int. J. Eng. Tech. 2020. Vol. 6. No. 6. P. 1–7.

21. *Peng Z.K., Peter W.T., Chu F.L.* A comparison study of improved Hilbert–Huang transform and wavelet transform: Application to fault diagnosis for rolling bearing // Mech. Syst. Signal Process. 2005. Vol. 19. P. 974–988.

22. *Zayed A.I.* Hilbert transform associated with the fractional Fourier transform // IEEE Signal Process. Lett. 1998. Vol. 5. P. 206–208.

23. *De Souza U.B., Escola J.P.L., da Cunha Brito L.* A survey on Hilbert–Huang transform: Evolution, challenges and solutions // Digit. Signal Process. 2021. Vol. 120. No. 4. Article No. 103292. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103292

24. *Bhattacharyya A., Singh L., Pachori R.B.* Fourier–Bessel series expansion based empirical wavelet transform for analysis of non-stationary signals // Digit. Signal Process. 2018. Vol. 78. P. 185–196.

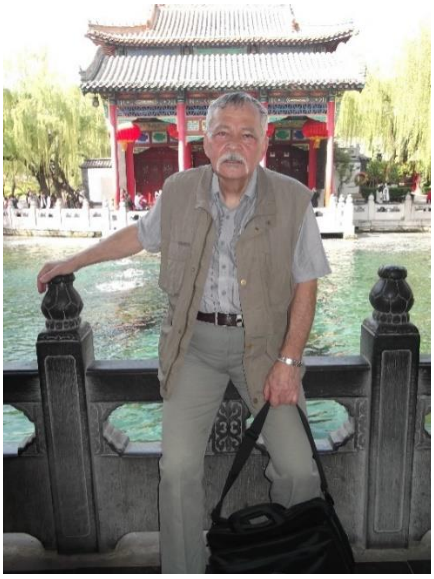
25. *Chaudhary P.K., Gupta V., Pachori R.B.* Fourier–Bessel representation for signal processing: A review // Digit. Signal Process. 2023. Vol. 135. Article No. 103938. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2023.103938Get rights and content

26. *Huang N.E., Shen Z., Long S.R., Wu M.C., Shih H.H., Zheng Q., Yen N.C., Tung C.C., Liu H.H.* The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis // Proc. R. Soc. Lond. A Math. Phys. Eng. Sci. 1998. Vol. 454. P. 903–995.

27. *Wu Z., Huang N.E.* Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method // Adv. Adapt. Data Anal. 2009. Vol. 1. P. 1–41.

28. *Nigmatullin R.R., Alexandrov V., Agarwal P., Jain S., Ozdemir N.* Description of Multi-Periodic Signals Generated By Complex Systems: NOCFASS – New Possibilities of the Fourier Analysis // Numerical Algebra, Control and Optimization. March 2024. Vol. 14. No. 1. P. 1–19. https://doi.org/10.3934/naco.2022008.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



НИГМАТУЛЛИН Равиль Рашидович – доктор физико-математических наук, профессор, преподаватель кафедры Радиоэлектроники и информационно-измерительной техники Казанского национального исследовательского университета им. А.Н. Туполева.

Подробнее: http://tre.kai.ru/staff/Nigmatullin/

Raoul RashidovichNIGMATULLIN – Doctor of Phys.-Math. Science, Full Professor, Teacher of the Radioelectronics and Informative-Measurements Technics Department, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A.N. Tupolev.

More details: http://tre.kai.ru/staff/Nigmatullin/

email: renigmat@gmail.com

ORCID 0000-0003-2931-4428

ЛИТВИНОВ Александр Алексеевич – научный сотрудник, Институт информационных технологий и интеллектуальных систем, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия.

Alexander Alekseevich LITVINOV – Researcher, Institute of Information Technology and Intelligent Systems, Kazan Federal University, Kazan, Russia.

email: sharebox@bk.ru

ORCID 0009-0000-3901-3704

ОСОКИН Сергей Игоревич – доцент, кандидат физико-математических наук, заместитель директора по научной деятельности Института информационных технологий и интеллектуальных систем Казанского федерального университета. Подробнее: https://kpfu.ru/Sergey.Osokin

Sergey Igorevich OSOKIN – Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Deputy Director for Research at the Institute of Information Technologies and Intelligent Systems of Kazan Federal University. More details: https://eng.kpfu.ru/Sergey.Osokin

email: s.osokin@it.kfu.ru

ORCID 0000-0002-0699-5390

Материал поступил в редакцию 14 февраля 2025 года