УДК 624.04:531.39.3

ПРОГИБ И ПЕРВЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ РЕГУЛЯРНОЙ АРОЧНОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов[0000-0002-8588-3871]

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Россия, г. Москва

c216@ya.ru

Аннотация

Численно получены зависимости первых четырёх частот собственных колебаний плоской регулярной фермы распорного типа. Использована модель, в которой масса фермы концентрируется в её узлах. Для расчёта жёсткости фермы использована формула Максвелла–Мора. Для первой частоты методом индукции с использованием упрощённого варианта метода Донкерлея в системе компьютерной математики Maple построена аналитическая зависимость от числа панелей. Показано хорошее совпадение с численным результатом. Получена формула для статического прогиба фермы как функция числа панелей, размеров и нагрузки.

Ключевые слова*: плоская ферма, собственные колебания, первые частоты колебаний, прогиб, метод Донкерлея, аналитическое решение, Maple, основная частота, формула Максвелла–Мора, регулярная ферма.*

ВВЕДЕНИЕ

В практических расчётах частоты собственных колебаний конструкций, как правило, используются специализированные численные пакеты на основе метода конечных элементов [1–3]. Альтернативный метод расчёта — аналитический, применим для статически определимых регулярных ферм. Известны два простых метода, дающие оценки первой частоты: метод Донкерлея (оценка снизу) и метод Рэлея (оценка сверху) [4]. Здесь получены формулы для двухсторонней оценки частоты колебаний плоской консольной фермы с раскосной решёткой. В [5] приведён упрощенный вариант метода Донкерлея с более точным аналитическим решением. Аналитическое решение в виде конечной формулы может быть использовано для оценки численного решения, тем более, что точность такого метода не связана с числом стержней в конструкции, в то время как метод конечных элементов для крупномасштабных систем склонен к накоплению погрешностей. В [6] получена аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной решетчатой фермы и проанализирован спектр всех частот. Оценка основной частоты колебаний пространственной регулярной фермы с горизонтальным ригелем в виде компактной формулы дана в [7]. В [8, 9] исследована зависимость области резонансно безопасных частот спектра собственных колебаний плоской регулярной фермы с произвольным числом панелей от параметров задачи. Аналитическое решение задачи о частоте колебаний пространственной консольной фермы построено в [10]. Формула для собственной частоты колебаний плоской фермы регулярного типа получена в [11]. Справочник [12] содержит схемы плоских регулярных ферм и формулы для расчёта их прогибов, усилий в характерных стержнях и смещений опор.

СХЕМА ФЕРМЫ

Рассмотрим схему статически определимой фермы распорного типа с параллельными поясами (рис. 1). Ферма имеет крестообразную решётку и две неподвижные опоры. Средняя часть, приподнятая на высоту *h,* содержит 2*n* панелей длиной 2*a* и высотой 2*h*.

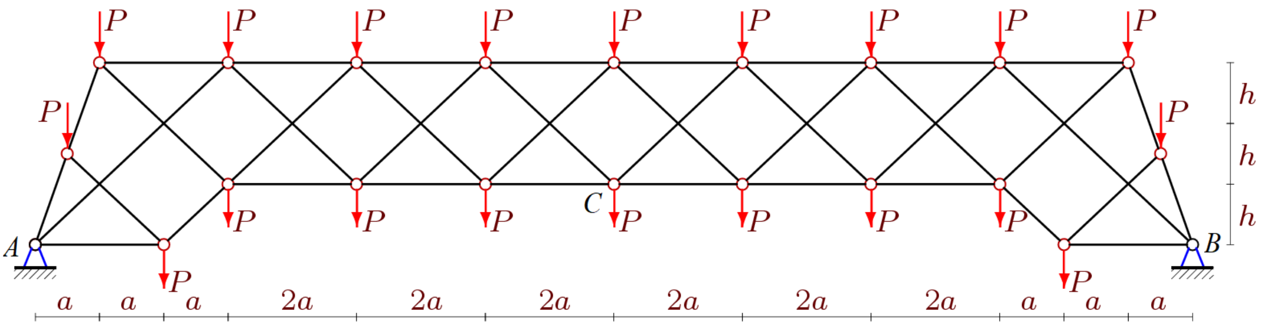

Рис. 1. Ферма под действием нагрузки, *n* = 3

Ферма состоит из $\eta = 8n + 16$ стержней и $4n + 10$ узлов. В число стержней не входят четыре стержня, моделирующие две неподвижные опоры.

Для расчёта жёсткости конструкции по формуле Максвелла–Мора при определении частот колебаний методом вырезания узлов находят усилия в стержнях. Схема конструкции задаётся координатами узлов и порядком соединения стержней в узлы. Начало координат размещается в левой опоре *A* (рис. 1 и 2). Координаты имеют вид:

$$
\begin{aligned}
& x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = 2a, y_2 = 0, \\
& x_{i+2} = (2i+1)a,\ y_{i+2} = h,\ i = 1,..,2n+1, \\
& x_{i+2n+6} = (2i-1)a,\ y_{i+2n+6} = 3h,\ i = 1,..,2n+3, \\
& x_{2n+4} = L_0 - 2a,\ y_{2n+4} = 0, \\
& x_{2n+5} = L_0,\ y_{2n+5} = 0, \\
& x_{2n+6} = a/2,\ y_{2n+6} = 3h/2, \\
& x_{2n+7} = a,\ y_{2n+7} = y_{4n+10} = 3h/2, \\
& x_{4n+10} = L_0 - a/2.
\end{aligned}
$$

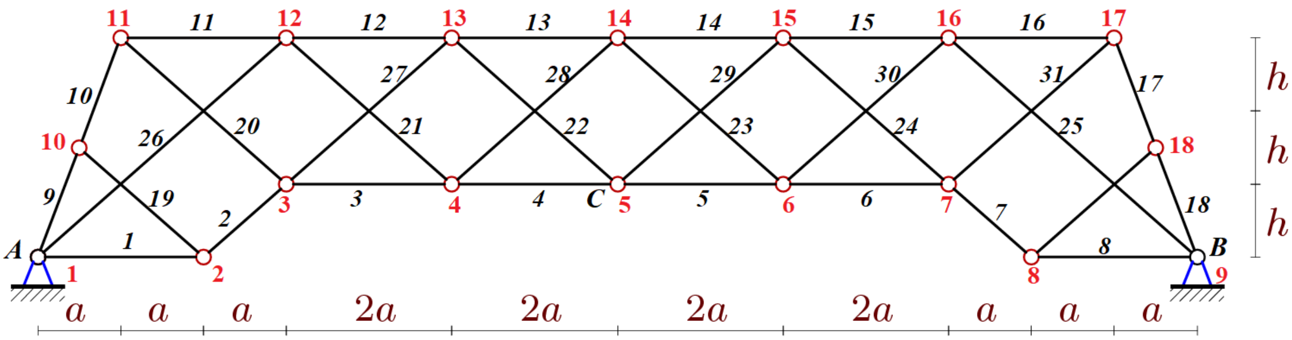

Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы, *n* = 2

Порядок соединения стержней в узлы решётки фермы определяется специальными списками номеров узлов по концам отдельных стержней конструкции. Стержни поясов, например, задаются неориентированными списками:

$$\Phi_i = [i, i+1],\ \Phi_{i+2n+5} = [i+2n+5, i+2n+6],\ i = 1,..,2n+4.$$

Условие равновесия узлов записывается в виде уравнений в проекции на оси координат. Коэффициентами этих уравнений являются направляющие косинусы усилий:

$$l_{x,i} = (x_{\Phi_{i,1}} - x_{\Phi_{i,2}}) / l_i,\ l_{y,i} = (y_{\Phi_{i,1}} - y_{\Phi_{i,2}}) / l_i,\ i = 1,...,\eta,$$

где $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2}$. Матрица G системы линейных уравнений равновесия узлов формируется следующим образом:

$$G_{2\Phi_{i,1}-1,i} = l_{x,i} / l_i,\ G_{2\Phi_{i,1},i} = l_{y,i} / l_i,$$
$$G_{2\Phi_{i,2}-1,i} = -l_{x,i} / l_i, G_{2\Phi_{i,2},i} = -l_{y,i} / l_i.$$

Система уравнений равновесия узлов записывается в матричной форме

$$\mathbf{GS} = \mathbf{T}, \tag{1}$$

где $\mathbf{T}$ — вектор внешних узловых нагрузок, $\mathbf{S}$ — вектор усилий в стержнях. Усилия находятся из решения системы уравнений методом обратной матрицы в системе компьютерной математики Maple.

ПРОГИБ

Прогиб фермы с *n* панелями в половине пролета рассчитывается по вертикальному смещению среднего узла нижнего пояса с использованием формулы Максвелла–Мора:

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{\eta} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF),$$

где $S_i^{(P)}$ — усилие в стержне с номером *i* от действия нагрузки *P*, распределенной по всем узлам фермы, s — усилие от единичной силы, приложенной к узлу *C* с номером *n*+3, смещение которого рассчитывается, *EF* — жёсткость стержней фермы на продольные усилия. Аналитическая зависимость прогиба от числа панелей определяется методом индукции обобщением последовательности решений для ферм различного порядка. Решение системы (1) в системе Maple даёт следующую последовательность:

$$\Delta_1 = P(51a^3 + 11c^3 + 12h^3) / (2h^2 EF),$$
$$\Delta_2 = P(12644a^3 + 528c^3 + 41d^3 + 576h^3) / (72h^2 EF),$$
$$\Delta_3 = P(2273a^3 + 117c^3 + 60h^3) / (6h^2 EF),$$
$$\Delta_4 = P(27276a^3 + 660c^3 + 19d^3 + 288h^3) / (24h^2 EF),$$
$$\Delta_5 = P(11537a^3 + 249c^3 + 84h^3) / (6h^2 EF), \ldots$$

Для определения общего члена этой последовательности потребовалось продолжения её до 18 членов. Общий вид полученного решения имеет вид:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2 EF). \tag{2}$$

Операторы системы Maple из решения рекуррентных уравнений дают следующие коэффициенты:

$$C_1 = (60n^4 + 8(4(-1)^n + 25)n^3 + 2(32(-1)^n + 215)n^2 +$$
$$+ 6(27(-1)^n + 79)n + 123(-1)^n + 135) / 36,$$
$$C_2 = (2n^2 + (5 - (-1)^n)n + 2(-1)^n + 5) / 2,$$
$$C_3 = (25 + 8n)((-1)^n + 1) / 144,$$
$$C_4 = 2n + 4.$$

Зависимость (2) имеет асимптотику, кубическую по числу панелей:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n / n^3 = 5P_0 a^3 / (12h^2 EF),$$

где $P_0 = 4(n+2)P$ – суммарная нагрузка на ферму.

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Модель фермы предполагает, что масса фермы равномерно распределена по узлам сосредоточенными массами m. Колебания происходят по оси *y*. Горизонтальные смещения масс не учитываются, число степеней свободы системы масс равно числу узлов $K = 4n + 10$. Уравнения движения масс в узлах фермы записываются в матричной форме:

$$\mu I_K \ddot{Y} + D_K Y = 0. \tag{3}$$

Здесь Y – вектор вертикальных смещений узлов фермы, $\ddot{Y}$ – вектор ускорений, I_K — единичная матрица, D_K – матрица жёсткости. В предположении, что колебания гармонические с частотой ω, справедлива замена $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$. При умножении уравнения (3) слева на матрицу податливости B_K задача сводится к проблеме собственных значений матрицы B_K: $B_K Y = \lambda Y$, где $\lambda = 1/(\omega^2 \mu)$ — собственные числа. Матрица податливости является обратной матрице жёсткости: $B_K = 1/D_K$. Значения элементов этой матрицы вычисляются по формуле Максвелла–Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{\eta} S_\alpha^{(i)} S_\alpha^{(j)} l_\alpha / (EF), \tag{4}$$

где $S_\alpha^{(i)}$ — усилие в стержне с номером $\alpha = 1,..,\eta$ от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу *i*. В число стержней включены четыре стержня, моделирующие неподвижные шарнирные опоры. Длина вертикальных опорных стержней принята равной *h*, горизонтальных — *a*. Эти длины определяют жёсткость опор. Жёсткость *EF* всех стержней фермы одинаковая. Вычислить собственные числа матрицы для расчёта спектра частот можно численно в системе Maple.

На рис. 3 представлены результаты расчёта первых трёх собственных частот в зависимости от числа панелей в ферме. Приняты размеры фермы: *h* = 2м, *a* = 3 м, массы в узлах $\mu = 200$ кг, модуль упругости $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, площадь поперечного сечения стержней $F = 9\ \text{см}^2$. Плотность распределения различных частот существенно зависит от числа панелей. При *n* = 6, например, две верхние частоты ω_3 и ω_4 совпадают, а для фермы с одной панелью в половине пролета (*n* = 1) совпадают частоты ω_1 и ω_2. Для первой частоты можно найти приближенное аналитическое выражение.

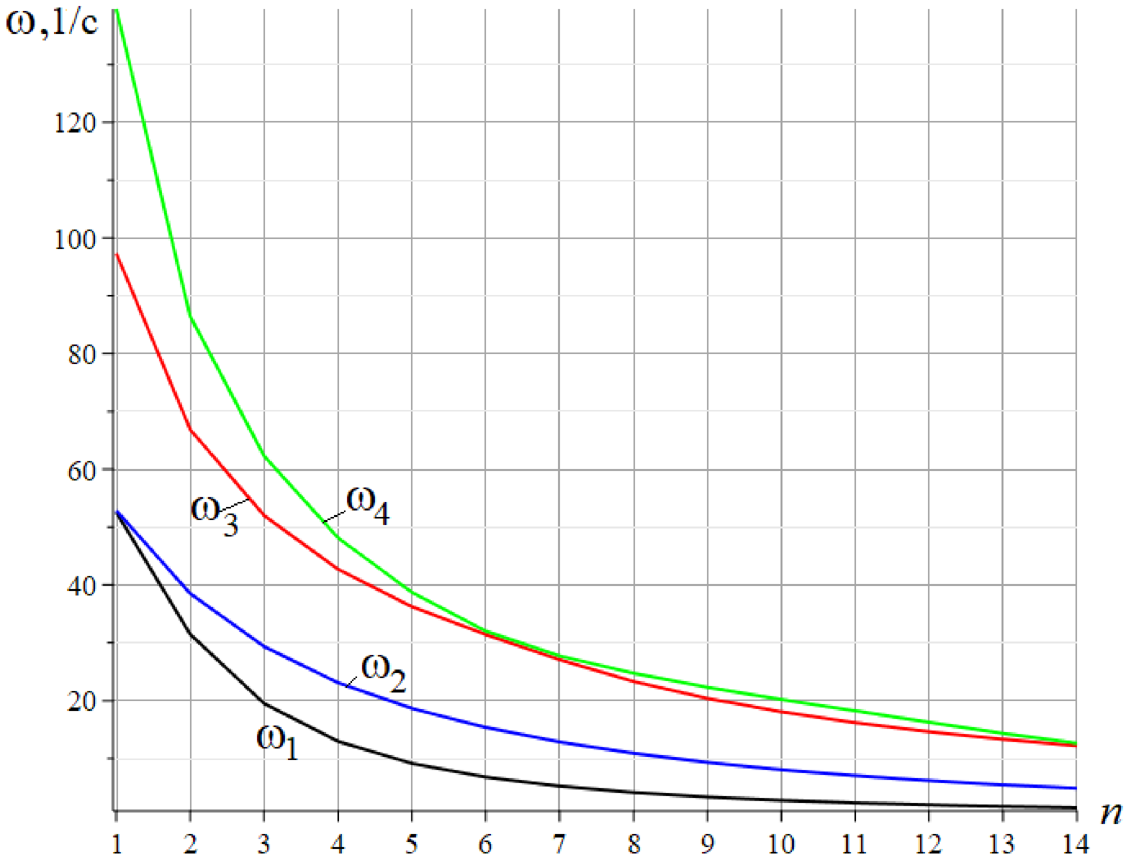

Рис. 3. *Частоты колебаний в зависимости от числа панелей*

ФОРМУЛА ДЛЯ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ

Для приближенной оценки нижней границы основной частоты известна формула Донкерлея

$$\omega_D^{-2} = \sum_{j=1}^{K} \omega_j^{-2}, \tag{5}$$

где ω_j — парциальная частота груза в узле *j*, вычисленная из уравнения его движения:

$$\mu \ddot{y}_j + D_j y_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, K.$$

Коэффициент жёсткости D_j есть величина, обратная податливости, которая вычисляется по формуле Максвелла–Мора:

$$\delta_j = 1 / D_j = \sum_{\alpha=1}^{\eta} \left(S_\alpha^{(j)} \right)^2 l_\alpha / (EF). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует формула для нижней границы первой собственной частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = \mu \sum_{j=1}^{K} \delta_j = \mu \Delta_n. \tag{7}$$

Метод Донкерлея имеет два недостатка: заниженное значение частоты и сложность вычисления суммы в символьной форме. Этих недостатков лишен упрощенный вариант метода Донкерлея [5], в котором предложено заменить сумму приближенным её значением, рассчитанным по теореме о среднем. Сумма ординат в (7) ассоциируется с площадью криволинейной фигуры, для вычисления которой используется формула площади треугольника:

$$\omega_D^{-2} = \mu \sum_{j=1}^{K} \delta_j = \mu \delta_{\max} K / 2 = \mu \Delta_{\max},$$

где $\delta_{\max}$ — максимальное значение δ_j. Точка, смещение которой под действием силы, приложенной к ней, имеет наибольшее значение, выбирается опытным путем. В данной задаче, очевидно, это средний шарнир *C* в нижнем поясе с номером *n*+3. Рассчитав значение максимального прогиба от единичной силы для ферм разного порядка, получим последовательность

$$\Delta_{\max 1} = K(9a^3 + 5c^3 + h^3)/(4h^2EF),$$
$$\Delta_{\max 2} = K(409a^3 + 54c^3 + d^3 + 9h^3)/(36h^2EF),$$
$$\Delta_{\max 3} = K(65a^3 + 9c^3 + h^3)/(4h^2EF),$$
$$\Delta_{\max 4} = K(1697a^3 + 90c^3 + d^3 + 9h^3)/(36h^2EF),$$
$$\Delta_{\max 5} = K(233a^3 + 13c^3 + h^3)/(4h^2EF),...$$

Обобщение этого ряда на произвольное число панелей даёт формулу

$$\Delta_{\max} = (4n+10)(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + h^3/4)/(h^2EF),$$

где

$$C_1 = (12n^3 + 6(2(-1)^n + 5)n^2 +$$
$$+8(2(-1)^n + 5)n + 3(-1)^n + 30)/36,$$
$$C_2 = (4n - (-1)^n + 5)/8,$$
$$C_3 = ((-1)^n + 1)/72.$$

Отсюда следует формула для расчёта первой частоты свободных колебаний фермы:

$$\omega_* = h\sqrt{\frac{EF}{\mu(4n+10)(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + h^3/4)}}. \qquad (8)$$

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ

Для оценки приближённого аналитического решения (8) надо найти первую частоту численно. Приняты те же параметры фермы, что и в решении задачи о первых четырёх частотах на рис. 3. На рис. 4 приведено сравнение аналитической зависимости (8) частоты ω_* от числа панелей и частоты ω_1, полученной численным путём. Рассмотрены два варианта высоты *h*.

При увеличении числа панелей собственная частота монотонно уменьшается, а результаты аналитического расчёта приближаются к численному. Для уточнения погрешности аналитического метода введём относительную величину $\varepsilon_* = |\omega_1 - \omega_*|/\omega_1$. Из рис. 5 видно, что точность формулы (8) с увеличением числа панелей растет. Для ферм с меньшей высотой погрешность незначительно меньше. Существенно влияет на точность и чётность числа панелей. Например, при *n*=5 точность в три раза больше, чем при *n*=6.

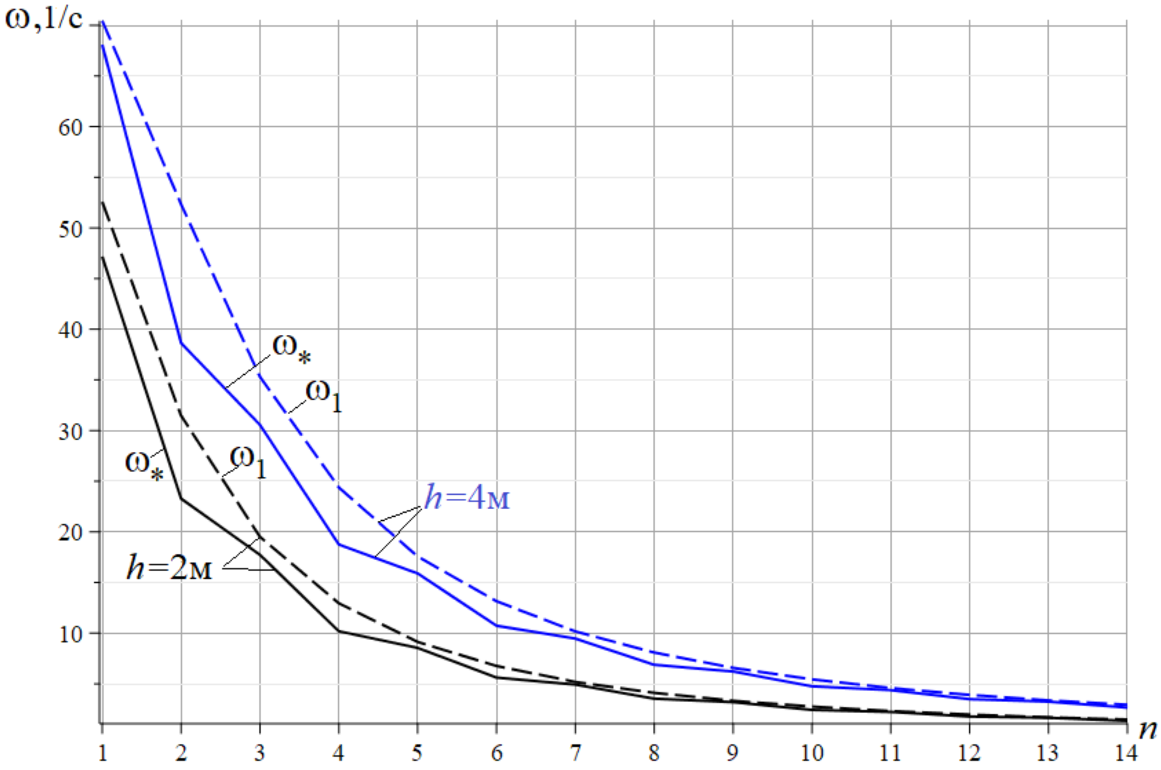

Рис. 4. Зависимость первой частоты собственных колебаний фермы от числа панелей при h = 2 м и h = 4 м.

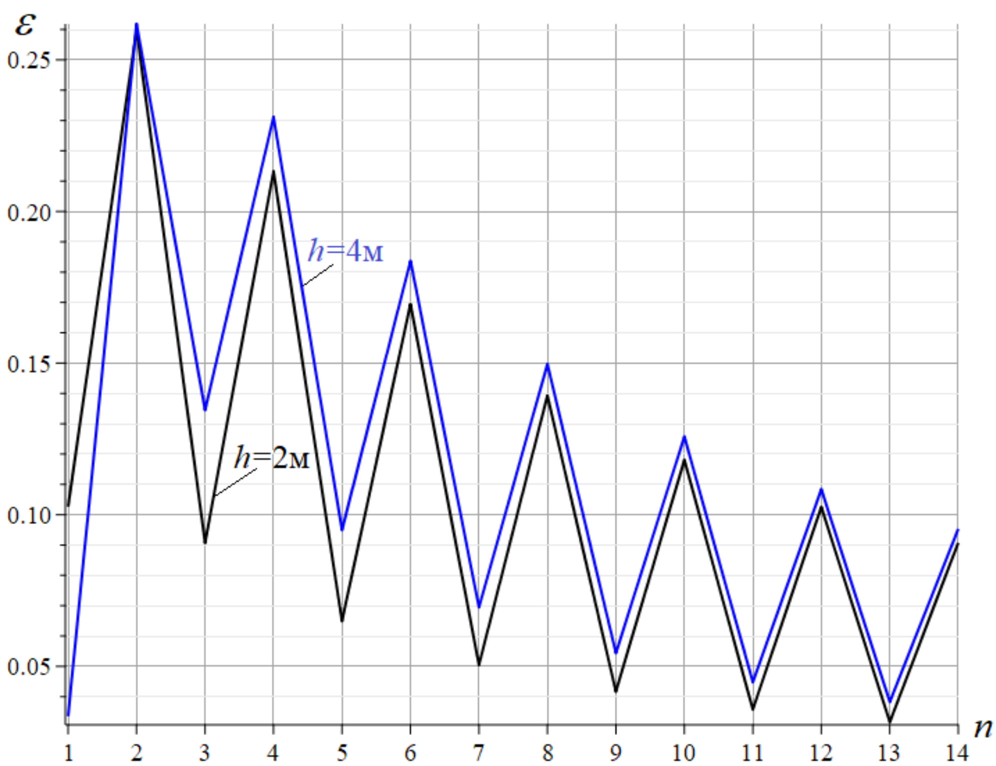

Рис. 5. Зависимости погрешности аналитического решения от числа панелей

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена схема плоской распорной фермы арочного типа. Построена формула зависимости прогиба фермы под действием распределенной узловой нагрузки и дан ее анализ. Численно рассчитаны первые четыре собственные частоты колебаний в зависимости от числа панелей. Для первой частоты методом индукции получено приближённое аналитическое выражение. Показано, что точность этого решения растет с увеличением числа панелей. Предложенный алгоритм построения аналитического решения может быть использован для расчётов основной частоты регулярных статически определимых ферм. Одно из преимуществ аналитического решения, помимо его очевидной простоты, состоит в том, что если погрешность численного решения закономерно растет с увеличением числа панелей, то для аналитического решения она падает. Полученная формула может служить простой оценкой численного решения, полученного для более точной модели этой же фермы, например, с учётом масс стержней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саиян С.Г., Шитикова М.В.* Сравнительный анализ динамического отклика зданий и сооружений различной высотности на ветровые и сейсмические воздействия // Строительная механика и конструкции. 2025. № 1(44). С. 16–30. https://doi.org/10.36622/2219-1038.2025.44.1.002. EDN QCCKXD.

2. *Han Q.H., Xu Y., Lu Y., Xu J., Zhao Q.H.* Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis // Engineering Structures. 2015. Vol. 82. P. 186–198. https://doi.org/10.1016/j.engstruct. 2014.10.013.

3. *Plevris V., Ahmad A.* Deriving Analytical Solutions Using Symbolic Matrix Structural Analysis: Part 2 – Plane Trusses // Heliyon. 2025. Vol. 11. No. 4. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2025.e42372

4. *Vorobev O*. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No. 9204. https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4

5. *Kirsanov M.* Simplified Dunkerley Method for Estimating the First Oscillation Frequency of a Regular Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. Vol. 108. https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1.

6. *Комерзан Е.В., Маслов А.Н.* Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. №2(37). С. 17–26. https://doi.org/10.36622/ VSTU.2023.37.2.002

7. *Комерзан Е.В., Маслов А.Н.* Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. №2(37). С. 35–45. https://doi.org/10.36622/ VSTU.2023.37.2.004

8. *Лыонг Конг Л.* Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // Строительная механика и конструкции. 2024. №2(41). С. 16–26. https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.41.2.002

9. *Luong C.L.* Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2024. Vol. 113. Article No. 11304. https://doi.org/10.4123/CUBS.113.4

10. *Sviridenko O., Komerzan E.* The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. Vol. 101 Article No. 10101. https://doi.org/10.4123/CUBS.101.1

11. *Maslov A.* The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. Vol. 109. Article No. 10912. https://doi.org/10.4123/CUBS.109.12

12. *Kirsanov M.N.* Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. 2019. 198 p. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK ISBN (13): 978-1-5275-3531-2

DEFLECTION AND FIRST NATURAL FREQUENCIES OF A REGULAR ARCHED TRUSS OSCILLATION

M. N. Kirsanov[0000-0002-8588-3871]

National Research University MPEI, Moscow, Russia

c216@ya.ru

Abstract

The dependences of the first four frequencies of natural oscillations of a planar regular truss of the thrust type are obtained numerically. A model is used in which the mass of the truss is concentrated in its nodes. The Maxwell–Mohr formula is used to calculate the rigidity of the truss. For the first frequency, an analytical dependence on the number of panels is derived by the induction method using a simplified version of the Dunkerley method in the Maple computer mathematics system. Good agreement with the numerical result is shown. An analytical dependence of the static deflection of the truss on its dimensions and load is obtained.

Keywords*: Planar truss, natural oscillations, first oscillation frequencies, deflection, Dunkerley method, analytical solution, Maple, fundamental frequency, Maxwell–Mohr formula, regular truss.*

REFERENCES

1. *Saiyan S.G., Shitikova M.V.* Comparative analysis of the dynamic response of buildings and structures of different heights to wind and seismic loading // Structural mechanics and structures. 2025. Vol. 1 (44). P. 16–30. https://doi.org/10.36622/2219-1038.2025.44.1.002. EDN QCCKXD.

2. *Han Q.H., Xu Y., Lu Y., Xu J., Zhao Q.H.* Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis // Engineering Structures. 2015. Vol. 82. P. 186–198. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013.

3. *Plevris V., Ahmad A.* Deriving Analytical Solutions Using Symbolic Matrix Structural Analysis: Part 2 – Plane Trusses // Heliyon. 2025. Vol. 11. No. 4. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2025.e42372

4. *Vorobev O.* Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane

truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No. 9204. https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4

5. *Kirsanov M.* Simplified Dunkerley Method for Estimating the First Oscillation Frequency of a Regular Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. Vol. 108. https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1

6. *Komerzan E.V., Maslov A.N.* Analytical assessment of the fundamental frequency of natural vibrations of a regular truss // Structural mechanics and structures. 2023. Vol. 2 (37). P. 17–26. https://doi.org/10.36622/ VSTU.2023.37.2.002

7. *Komerzan E.V., Maslov A.N.* Estimation of the fundamental vibration frequency of an L-shaped spatial truss // Structural mechanics and structures. 2023. Vol. 2 (37). P. 35–45. https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004

8. *Luong Kong L.* Dependence of the region of resonantly safe frequencies on the dimensions of a statically determinate flat truss // Structural Mechanics and Structures. 2024. No. 2 (41). P. 16–26.
https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.41.2.002

9. *Luong C.L.* Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2024. Vol. 113. Article No. 11304. https://doi.org/10.4123/CUBS.113.4

10. *Sviridenko O., Komerzan E.* The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. Vol. 101 Article No. 10101.
https://doi.org/ 10.4123/CUBS.101.1

11. *Maslov A.* The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. Vol. 109. Article No. 10912. https://doi.org/10.4123/CUBS.109.12

12. *Kirsanov M.N.* Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. 2019. 198 p. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK ISBN (13): 978-1-5275-3531-2

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

***КИРСАНОВ Михаил Николаевич*.** Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, Национальный исследовательский университет «МЭИ». Россия, г. Москва

***Mikhail Nikolaevich KIRSANOV*.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics, and Strength of Machines, National Research University "MPEI. Moscow, Russia.

e-mail: c216@ya.ru

ORCID: 0000-0002-8588-3871

Материал поступил в редакцию 5 апреля 2025 года