УДК 372.851 + 51.8 + 519.6

НАУКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ

Н.В. Шилов[1], С.О. Шилова[2]

Университет Иннополис, Иннополис

[1] shiloviis@mail.ru, [2] shilov61@inbox.ru

Аннотация

Обсуждены примеры олимпиадных задач по математике, которые следует отнести к теории программирования и решать методами этой теории. Главный вывод, который мы при этом пытаемся обосновать, состоит в следующем: к сожалению, образование в области классической и прикладной математики не учитывает целесообразность преподавание теории программирования будущим математикам.

Ключевые слова: *математические олимпиады, теория программирования, устранение рекурсии, графовые грамматики, задача достижимости в графе*

Вопросу об исторических, культурных, образовательных связях математики и программирования уже 70 лет, если считать со времени появления электронно-счётных машин. Многие классики науки программирования, такие, как Дональд Кнут, Эдсгер Дейкстра, Андрей Петрович Ершов, посвятили этой теме несколько замечательных публикаций [4, 6, 2]. Известно также мнение выдающегося математика и логика В.А. Успенского о гуманитарном характере математики [3].

В данной работе мы хотим отметить, что современное математическое образование нуждается в добавлении нового для него ингредиента – науки (теории) программирования, то есть методов построения и анализа программ. Для обоснования данного предположения проанализируем задачи [11] Международной математической олимпиады 2019 года [10].

Дело в том, что из 6 заданий олимпиады 2,5 (именно так: «два с половиной») – классические задачи теории программирования. А именно, речь идет о следующих задачах (мы приводим формулировки на английском по [11]).

- [Задание 1] Let Z be the set of integers. Determine all functions f: Z→Z such that, for all integers a and b, f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).
- [Задание 3] A social network has 2019 users, some pairs of whom are friends. Whenever user A is friends with user B, user B is also friends with user A. Events of the following kind may happen repeatedly, one at a time:

Three users A, B, and C such that A is friends with both B and C, but B and Care not friends, change their friendship statuses such that B and C are now friends, but A is no longer friends with B, and no longer friends with C. All other friendship statuses are unchanged.

Initially, 1010 users have 1009 friends each, and 1009 users have 1010 friends each. Prove that there exists a sequence of such events after which each user is friends with at most one other user.

- [Задание 5] The Bank of Bath issues coins with an H on one side and a T on the other. Harry has n of these coins arranged in a line from left to right. He repeatedly performs the following operation: if there are exactly k>0 coins showing H, then he turns over the kth coin from the left; otherwise, all coins show T and he stops. For example, if n=3 the process starting with the configuration THT would be THT → HHT → HTT → TTT, which stops after three operations.

(a) Show that, for each initial configuration, Harry stops after a finite number of operations.

(b) For each initial configuration C, let L(C) be the number of operations before Harry stops. For example, L(THT)=3 and L(TTT)=0. Determine the average value of L(C) over all 2^n possible initial configurations C.

Задание 3 – это типичная задача о выводимости в графовой грамматике; мы планируем посвятить следующую статью тому, как эту задачу можно решить методами теории программирования. Задание 5(a) – это типичная задача о завершаемости алгоритма, которая хорошо решается методом Флойда; примеры решения таких задач методом Флойда можно найти в наших статьях [1, 7]. А вот задание 1 – это «классика» устранения рекурсии [5, 8], его «программистское» решение будет представлено далее.

Классический пример устранения монадической рекурсии методом ее сведения к хвостовой рекурсии – это задача о функции McCarthy 91 [5, 8]: требуется «определить» (или, как сказано в формулировке задания 1, determine) функцию $M: N \rightarrow N$, такую, что M(n) = if n>100 then (n-10) else M(M(n+11)); оказывается, что искомая функция – это M(n) = if n>101 then (n-10) else 91. «Ключом» к устранению рекурсии в этом (и других подобных случаях с монадической функцией, определенной рекурсивно) является переход от монадической функции $M: N \rightarrow N$ к бинарной функции $M2: N\times N \rightarrow N$, заданной для любых $n,k \in N$ правилом $M2(n, k)=M^k(n)$, где $M^k(n)$ – это k-кратное применение M, то есть M(…M(n)…), причем, очевидным образом, $M2(n, 0)=M^0(n)=n$ для любого $n \in N$.

Рассмотрим конкретно, как работает такая техника устранения рекурсии на примере задания 1. Из равенства f(2a)+2f(b)=f(f(a+b)) следует (при подстановке a=0), что f(0)+2f(b)=f(f(b)) при любом $b \in Z$. Введём бинарную функцию $F: Z\times N \rightarrow Z$ аналогично тому, как была введена функция $M2: N\times N \rightarrow N$ в предыдущем параграфе: $F(b, k)=f^k(b)$ для любых $b \in Z$ и $k \in N$. Тогда из равенства f(0)+2f(b)=f(f(b)) при всех $b \in Z$ следует равенство $F(b, k+1)=2F(b, k)+f(0)=2(F(b,k-1)+f(0))+f(0)= \ldots =2^{k+1}F(b,0)+(2^{k+1}-1)f(0)$; так как F(b,0)=b, то получаем $F(b,k+1)=2^{k+1}b+(2^{k+1}-1)f(0)$, а так как нас интересует f(b)=F(b,1), то получаем f(b)=2b+f(0), что завершает решение задания 1. На самом деле мы установили только, что если задание имеет решение, то оно обязано иметь вид f(b)=2b+f(0), $b \in Z$, и нам надо еще показать, что любая такая функция превращает исходное уравнение f(2a)+2f(b)=f(f(a+b)) в верное равенство, однако это можно сделать простой подстановкой.

В заключение мы хотим привлечь внимание математической общественности к новой версии теста Тьюринга – IMO Grad Challenge [9]:

The International Mathematical Olympiad (IMO) is perhaps the most celebrated mental competition in the world and as such is among the ultimate grand challenges for Artificial Intelligence (AI).

The challenge: build an AI that can win a gold medal in the competition.

To remove ambiguity about the scoring rules, we propose the formal-to-formal (F2F) variant of the IMO: the AI receives a formal representation of the problem (in the Lean Theorem Prover), and is required to emit a formal (i.e. machine-checkable) proof. We are working on a proposal for encoding IMO problems in Lean and will seek broad consensus on the protocol.

Challenge. The grand challenge is to develop an AI that earns enough points in the F2F version of the IMO (described above) that, if it were a human competitor, it would have earned a gold medal.

Note: this is only a preliminary proposal for the rules. To get involved in the discussion, please join our Zulip channel.

Так что математикам пора учить не только теорию программирования, но и теорию, методы и инструменты автоматического доказательства теорем!

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бодин Е.В., Городняя Л.В., Шилов Н.В.* По какому предмету олимпиада? // Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2006, № 2, С. 226–233.

2. *Ершов А.П.* Программирование вторая грамотность. URL: http://ershov. iis. nsk.su/ ru/second_literacy/.

3. *Успенский В.А.* Апология математики. Санкт-Петербург: Амфора, 2009, 552 с.

4. *Dijkstra E.W.* On a cultural gap // The Mathematical Intelligencer. 1986, Vol. 8, No 1, P. 48–52.

5. *Knuth D.E.* Textbook Examples of Recursion. URL: https://arxiv.org/ pdf/cs/9301113.pdf.

6. *Knuth D.E.* Computer Science and Its Relation to Mathematics // The American Mathematical Monthly, 1974, Vol. 81, No. 4, P. 323–343.

7. *Shilov N.V., Shilova S.O.* On Mathematical Contents of Computer Science Contests // Enhancing University Mathematics: Proceedings of the First KAIST International Symposium on Teaching. CBMS Issues in Mathematics Education, Vol. 14. American Society, 2007, P. 193–204.

8. *Shilov N.V.* Etude on Recursion Elimination // Моделирование и анализ информационных системv, 2018, Vol. 25, No 5, P. 549–560.

9. IMO Grand Challenge. URL: https://imo-grand-challenge.github.io/.

10. International Mathematical Olympiad. URL: https://www.imo-official.org/ default.aspx.

11. Problems (with solutions). 60th International Mathematical Olympiad. Bath UK, 11th-22nd July 2019. URL: https://www.imo2019.uk/wp-content/uploads/ 2018/07/solutions-r856.pdf.

PARTICULAR SIDES WITH WORKING WITH TALENTED STUDENTS IN PROFESSIONAL TRAINING OF A TEACHER

Nikolai Shilov[1], Svetlana Shilova[2]

Innopolis University, Innopolis

[1] shiloviis@mail.ru, [2] shilov61@inbox.ru

Abstract

This presentation presents pedagogical recommendations based on experience of working with talented students.

Keywords: *professional goals, giftedness*

REFERENCES

1. *Bodin E.V., Gorodnyaya L.V., Shilov N.V.* Po kakomu predmetu olimpi-ada? // Sovremenny`e informacionny`e texnologii i IT-obrazovanie, 2006, No 2, S. 226–233.
2. *Ershov A.P.* Programmirovanie vtoraya gramotnost`. URL: http://ershov.iis.nsk.su/ru/second_literacy/.
3. *Uspenskij V.A.* Apologiya matematiki. Sankt-Peterburg: Amfora, 2009, 552 s.
4. *Dijkstra E.W.* On a cultural gap // The Mathematical Intelligencer, 1986, Vol. 8, No 1, P. 48–52.
5. *Knuth D.E.* Textbook Examples of Recursion. URL: https://arxiv.org/pdf/cs/9301113.pdf.
6. *Knuth D.E.* Textbook Examples of Recursion. URL: https://arxiv.org/pdf/cs/9301113.pdf.
7. *Knuth D.E.* Computer Science and Its Relation to Mathematics // The American Mathematical Monthly, 1974, Vol. 81, No. 4, P. 323–343.
8. *Shilov N.V., Shilova S.O.* On Mathematical Contents of Computer Science Contests // Enhancing University Mathematics: Proceedings of the First KAIST International Symposium on Teaching. CBMS Issues in Mathematics Education. Vol. 14. American Society, 2007, P. 193–204.
9. IMO Grand Challenge. URL: https://imo-grand-challenge.github.io/.
10. International Mathematical Olympiad. URL: https://www.imo-official.org/default.aspx.

11. Problems (with solutions). 60th International Mathematical Olympiad. Bath UK, 11th–22nd July 2019. URL: https://www.imo2019.uk/wp-content/uploads/2018/07/solutions-r856.pdf.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШИЛОВ Николай Вячеславович – доцент АНО ВО «Университет Иннополис».

Nikolai Vyacheslavovich SHILOV – assitant Professor, Innopolis University, Innopolis.

email: shiloviis@mail.ru

ШИЛОВА Светлана Олеговна – на пенсии, Иннополис.

Svetlana Olegovna SHILOVA – retired, Innopolis.

email: shilov61@inbox.ru

Материал поступил в редакцию 10 сентября 2019 года